

249.

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Մեղրակյան Տիգրան Արայի

ՔՎԱԶԻ-ՄԵԿ ՀԱՓԱՆԻ ԻՆՏԵԳՐՎՈՂ ՍՊԵԼԼԵՐ R-ՄԱՏՐԻՑԱՆԵՐԻ ՏՍՏԱՆՎՈՂ
ԴԱՍԱՎՈՐՎԱԾՈՒԹՅԱՍԲ

Ա.04.02 - «Տեսական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2002

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Седрамян Тигран Араевич

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КВАЗИ-ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ С
ЧЕРЕДУЮЩИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ R-МАТРИЦ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико - математических наук по специальности
01.04.02 – "Теоретическая физика"

ЕРЕВАН 2002

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ Ֆիզմաթ. գիտությունների թեկնածու,
Ռ. Յ. Պողոսյան

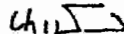
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ Ֆիզմաթ. գիտությունների դոկտոր
Ա. Ա. Բելավին (Լանդաուի անվ. ֆիզ.
ինստիտուտ, Մոսկվա),
Ֆիզմաթ. գիտությունների թեկնածու,
Տ. Ս. Հակոբյան (ԵրՖԻ)

Առաջատար կազմակերպություն՝ Ուզբեկստանի անվան մաթեմատիկայի
ինստիտուտ, Վրաստանի ԳԱԱ, Թբիլիսի

Պաշտպանությունը կայանալու է 2002թ. մայիսի "21" ժամը 14.00-ին Երևանի
ֆիզիկայի ինստիտուտում գործող ԲՈՅ-ի 024 մասնագիտական խորհրդում (Երևան,
Ալիխանյան եղբայրների փ.2):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵրՖԻ-ի գրադարանում:

Անդամագիրն առաքված է "20" ապրիլի 2002թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտքարտուղար  Ա. Թ. Սարգսյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском физическом институте

Научный руководитель՝ кандидат физ.-мат. наук
Р. Г. Погосян

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук,
Белавин А. А. (Инст. Физики
имени Ландау, Москва),
канд. физ.-мат. наук,
Акопян Т. С. (ЕрФИ).

Ведущая организация՝ Институт математики им.
Размадзе, НАН Грузии, Тбилиси

Защита состоится "21" мая 2002 г. в 14.00 часов на заседании
специализированного совета ВАК 024 в Ереванском физическом
институте (Ереван, ул. Братьев Алиханян 2)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрФИ.

Автореферат разослан "20" апреля 2002 г.

Ученый секретарь спец. совета  А. Т. Маргарян

- 3 -

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В связи с тем, что в последнее время стало возможным фабрикование систем, в которых эффективная пространственная размерность равна 0 (квантовые капли), 1 (одномерные полимеры), 2 (высокотемпературная сверхпроводимость, эффект Холла), физика твердого тела низких размерностей стала очень актуальной. Оказывается, что в вышеуказанных проблемах константы взаимодействия, в основном, порядка единицы, и поэтому стандартные методы теории возмущений не применимы полностью. Именно по этой причине важность точно решаемых квази-одномерных моделей в рамках которых можно точно определять физические величины, велика.

В начале 90-х годов появился большой интерес к моделям ладдер типа. Предполагается, что квази-одномерные мульти-ладдер цепи сильно коррелированных электронов отражают самые важные аспекты высокотемпературной сверхпроводимости двумерных систем и также могут обнаруживать некоторые свойства слабого взаимодействия между проводящими плоскостями.

В связи с вышесказанным, построение интегрируемых "ступенчатых" (ладдер) моделей мотивируется желанием применения мощной техники Алгебраического Бете Анзаца (АВА) в точных расследованиях различных физических фаз моделей.

В диссертационной работе развита техника построения точно решаемых ладдер моделей. Надо отметить, что полученные новые точно-решаемые модели, по-видимому,

обладают массовой щелью, что сильно расширяет область их применения.

Цель работы.

Целью диссертационной работы является разработка, развитие и употребление техники построения квазиоднородных интегрируемых моделей ступенчатого типа, нахождение их решения с помощью техники АВА с дальнейшей целью применения данных моделей в проблемах низкоразмерной физики твердого тела.

Научная новизна.

1. Предложен новый механизм построения квазиоднородных интегрируемых моделей на решетке ступенчатого типа.
2. Впервые были сформулированы условия и построены точно решаемые модели с чередующимся расположением R-матриц с разными знаками параметра анизотропии на базе анизотропной модели t - J . Найдены Гамильтонианы моделей, его собственные состояния и спектр энергий вычислены.
3. Впервые построена точно решаемая модель типа Хаббарда с чередующимся расположением R-матриц во временном и пространственном направлениях. Найдены решения системы чередующихся уравнений Янга-Бакстера.
4. Впервые была определена система уравнений Янга-Бакстера для моделей с чередующимися R-матрицами и найдены их решения для общего случая группы $gl(n)$.
5. Проанализирована структура алгебры Хопфа (квантовой группы) за чередующимися уравнениями Янга-Бакстера. Впервые сформулирована квантовая группа с матричным параметром деформации.

Научная и практическая ценность работы.

Научная и практическая ценность работы состоит в широком спектре применения точно решаемых моделей, от физики твердого тела до математической физики.

Более конкретно полученные результаты могут быть применены:

1. В теории физики твердого тела имеются численные приложения квази-одномерных моделей в таких проблемах, какими являются квантовые капли, квантовые нити, полимеры, высокотемпературная сверхпроводимость, эффект Холла. Для описания разных физических величин в некоторых проблемах также рассматриваются соответствующие точно решаемые ступенчатые модели.
2. В теории струн мировая поверхность двумерна, и формализм двумерных интегрируемых моделей там может быть успешно употреблен. В частности, свободные поля на флуктуирующей поверхности составляют базис для теории струн в $d \leq 1$. Некоторые из интегрируемых моделей имеют пределом конформную теорию поля.
3. Понятие "Квантовая теория групп" появилось в результате рассмотрения симметрий в точно решаемых моделях. Рассмотрение группы симметрии за новыми, построенными ладдер моделями позволяет получить обобщение некоторых квантовых групп.

Научные положения, выносимые на защиту.

1. Найдено обобщение уравнений Янга-Бакстера для моделей с чередующимся расположением R-матриц во временном и одномерном пространственном направлениях

- с целью удовлетворения условия коммутативности трансфер матриц с разными спектральными параметрами.
2. Построена интегрируемая модель t - J типа с чередующимся сдвигом спектрального параметра вдоль цепи. Гамильтониан модели вычислен в фермионной формулировке. Он включает в себя взаимодействия трех соседних фермионов и по-этому может быть представлен в форме зигзагообразной ступенчатой модели. С помощью техники Алгебраического Бете Анзаца найдены собственные значения и собственные состояния Трансфер матрицы данной модели. Замечено, что в термодинамическом пределе минимальная энергия модели получается при четверть-заполнении узлов фермионами, вместо обычного полу-заполнения.
 3. Обобщенные, Z_2 градуированные уравнения Янга-Бакстера решены для анизотропической t - J модели. Построена модель с чередующимся расположением параметра анизотропии вдоль цепи. Вычислен соответствующий Гамильтониан и, поскольку он содержит последующие к ближайшему соседу взаимодействия, может быть представлен в форме зигзага на решетке. Приложена техника Алгебраического Бете Анзаца, и найдены собственные состояния вместе с собственными значениями Трансфер матрицы.
 4. Построена точно решаемая модификация модели Хаббарда с Z_2 градуированной диспозицией операторов Лакса вдоль цепи. "Чередующиеся" уравнения Янга-Бакстера решены и найдены Лакс операторы данной модели в фермионной формулировке.
 5. Найдены решения "Чередующихся" Янг-Бакстер уравнений для общего случая группы $gl(n)$. В деталях проанализирован случай $N=2$ и за этим решением найдена соответствующая Квантовая группа $U_{qB}(gl(2))$ с матричным параметром деформации qB , где $(qB)^2=q^2$.

- Симметрия за этими моделями также может быть интерпретирована, как тензорное произведение алгебры Вейля и группой $U_{q,i}(gl(N))$ с двумя параметрами деформации q и i .
6. Развита теория возмущения, основанная на радиальном квантовании массивной модели Тирринга. Нужно отметить, что очевидная трудность радиального квантования массивных теорий, точнее явная зависимость Гамильтониана от времени, была удачно преодолена. В этой формулировке, в первой степени константы взаимодействия массивной модели Тирринга, найдена вакуум-вакуум амплитуда с произвольно сдвинутыми граничными условиями Ферми полей. В терминах Sine-Gordon теории эти амплитуды не что иное, как вакуумное ожидание экспоненциального поля $\langle \exp i a \phi(0) \rangle$. Полученный нами результат подтверждает гипотезу Лукьянова и Замолодчикова о выражении вакуумного ожидания экспоненциального оператора в модели Sine-Gordon.

Апробация работы.

Материалы и результаты диссертационной работы были представлены на научных семинарах в Ереванском Физическом Институте, на кафедре теоретической физики Ереванского Государственного Университета, в физических институтах LAPTH-Аннеси, SPhT-Саклей, NBI-Копенгаген, в университетах Бонна (Bonn University) и Берлина (Freie University).

Также основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных конференциях и воркшопах в Париже-2000, Тбилиси-2000, Аннеси-2001, Нор-Амберте-2001, Комо-2001.

Публикации.

Основные положения диссертационной работы представлены в шести опубликованных научных работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. В конце работы приведен список литературы, включающий 125 ссылок на оригинальные работы, обзоры и доклады на конференциях. Объем работы составляет 123 страницы машинописного текста, включая семь рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель исследования и практическая ценность работы. Приведены также основные моменты исторического развития области точно решаемых моделей.

Во второй главе приведена техника построения новых интегрируемых моделей "ступенчатого" вида на базе существующих интегрируемых моделей. Полученные модели имеют "чередующееся", точнее, Z_2 градуированное расположение R-матриц вдоль цепи и во времени. Особенностью сконструированных моделей является существование разных видов междуцепочных взаимодействий, которые имеют топологический характер.

С целью представления техники, которая впоследствии используется в следующих главах, в этой главе рассмотрена

неоднородная анизотропическая цепь Гейземберга (XXZ) с чередующимся параметром анизотропии $\pm\Delta$. Описывается построение интегрируемых моделей с коммутирующими трансфер матрицами, где R-матрицы расположены чередующимся образом вдоль цепи и во времени.

В секции 2.1 приведено и решено для случая XXZ модели условие коммутативности Трансфер матриц, зависящих от разных спектральных параметров, что является обобщением обычных уравнений Янга-Бакстера. Найдены четыре разные R-матрицы и представлены в фермионных полях.

В секции 2.2 найден Гамильтониан модели, который локализован, т. е. состоит из взаимодействий конечно удаленных узлов цепи. По причине того, что решетка инвариантна относительно трансляции на два узла, в Гамильтониане имеются члены взаимодействия между тремя соседними узлами (вместо соседних членов взаимодействия в обычной модели XXZ). Гамильтониан представлен зигзагом на решетке. Это Гамильтониан ступенчатого типа (Ladder Hamiltonian). Он состоит из двух членов, соответствующих SU(1,1) моделям Гейземберга для каждой из двух цепей и топологического взаимодействия между цепями, которые пишутся на треугольниках в виде:

$$\epsilon^{abc} \sigma_i^a \sigma_{i+1}^b \sigma_{i+2}^c,$$

где ϵ^{abc} анизотропический антисимметричный тензор.

В пределе свободных фермионов ($\lambda=\pi/2$) модель делится на две независимые группы свободных фермионов, перемещающихся только на четных или нечетных узлах цепей.

В секции 2.3 с помощью техники Алгебраического Бете Анзаца найдены собственные состояния Гамильтониана и его собственные значения.

В третьей главе рассмотрены изотропическая и анизотропическая t - J модели и с помощью техники, описанной во второй главе, построены соответствующие ступенчатые точно решаемые модели с чередующимся знаком параметра анизотропии.

В секции 3.1 рассмотрена изотропическая модель t - J . Рассмотрена Трансфер матрица с чередующимся сдвигом спектрального параметра. Приведены два уравнения Янга-Бакстера для каждого перехода R -матрицы вдоль цепи и найдено решение. Вычислен Гамильтониан модели, который может быть написан на решетке типа ступенчатого зигзага. Он состоит из двух цепей с t - J Гамильтонианами на каждой из них, прыжковых членов электронов с одной цепи на другую и двух видов взаимодействия между цепями. Первый член имеет форму спин-спин взаимодействия, где один из спинов формируется из двух фермионов на одинаковой вершине цепи, в то время как, другой спин состоит из двух фермионов на соседних вершинах другой цепи лестницы. Второй член взаимодействия имеет топологическую форму взаимодействующих спинов и представлен на треугольниках, состоящих из зигзагообразных рунгов (междуцепочных членов взаимодействия). Так же как и обычная модель t - J , представленная модель тоже обладает глобальной $gl(1|1)$ суперсимметрией.

В секции 3.2 приложена техника Алгебраического Бете Анзаца и найдены собственные состояния и собственные значения Гамильтониана, представленного в секции 3.1. Оказалось, что в этом случае Алгебраический Бете Анзац "гнезденный" (nested) как и в обычной модели t - J . Это значит, что мы должны решать две проблемы диагонализации, одну в другой. В конце секции 3.2 представлены энергия покоя модели и спектр возбуждений в термодинамическом пределе.

В секции 3.3 рассмотрена анизотропическая модель t - J и построена соответствующая ступенчатая модель. С помощью решения уравнений Янга-Бакстера для модели с чередующимся знаком параметра анизотропии для общего случая $Sl_q(n)$ квантовой группы, представленного в пятой главе, здесь мы переходим от спина $1/2$ (XXZ модель) к системе с тремя состояниями. Конкретно выписано выражение для R и R^i матриц, удовлетворяющее чередующиеся уравнения Янга-Бакстера для случая группы $Sl_q(1|2)$, с помощью которых вычислен Гамильтониан модели в ступенчатом виде. Рассмотрен также предел $q \rightarrow 1$, где q -параметр деформации, связанный с параметром анизотропии. Гамильтониан в этом пределе представляется как два суперсимметрических t - J Гамильтониана для каждой из цепей, где знак константы взаимодействия J одной цепи зависит от числа заполнения электроном соответствующего узла другой цепи, т. е., числа заполнения одной цепи определяют, является ли модель ферромагнитной или антиферромагнитной на соседней цепи.

В четвертой главе вышеупомянутая техника построения новых точно-решаемых моделей ступенчатого вида применяется к модели Хаббарда для построения новой модели с Z_2 градуированным расположением Лакс операторов вдоль цепи. Решены уравнения Янга-Бакстера и найдены операторы Лакса модели в фермионном представлении.

В пятой главе рассмотрена структура Квантовой группы, возникающая за "чередующимися" моделями.

В секции 5.1 дается определение алгебры Хопфа и представлены ее главные составные части, определен также частный случай алгебры Хопфа, который называется Квантовой группой и объясняется как уравнения Янга-Бакстера связаны с ним.

В секции 5.2 исследованы и найдены решения уравнений Янга-Бакстера для случая группы $gl(N)$.

В секциях 5.3-5.5 проанализировано полученное решение и исследована структура Квантовой группы за этим решением. Показано, что соответствующая Квантовая группа-это прямое произведение обычной группы Вейля и $U_q(gl(n))$, которая является двух параметровой (q и i) деформацией обычной $gl(n)$. Построен аналог операции копродукта в нашем случае, которая определена в алгебрах Хопфа. Показано, что обычный копродукт не является гомоморфизмом, поэтому приходится ввести и определить понятие три-продукта, являющегося гомоморфизмом.

Шестая глава посвящена исследованию интегрируемой двухмерной квантовой теории поля. Одним из последних достижений в этой области является точная формула для вакуумного ожидания экспоненциальных операторов в модели Sine-Gordon, предложенная Лукьяновым и Замолодчиковым. Исследована эта формула по теории возмущения массивной модели Тирринга (МТМ) в радиальном квантовании.

Внедрение сдвинутого (twisted) сектора в этой теории позволяет рассчитать вакуумное ожидание экспоненциальных полей $\langle \exp i a \phi(0) \rangle$ теории Sine-Gordon в первом порядке константы взаимодействия массивной модели Тирринга. Оказывается, что проблема явной зависимости Гамильтониана от времени в радиальном квантовании массивных теорий может быть удачно обойдена. Полученный нами результат согласуется с точной формулой, предложенной Лукьяновым и Замолодчиковым и совпадает с аналогичными расчетами, сделанными в подходе углового квантования, предложенного в работе Погосьяна.

В секции 6.1 описан метод радиального квантования МТМ.

В секции 6.2 рассчитано вакуумное ожидание экспоненциального оператора в точке свободных фермионов. Расчеты в первом порядке теории возмущений приведены в

секции 6.3. Здесь было обращено особое внимание на процедуру регуляризации произведения локальных полей в совпадающих точках, которая обладает новыми особенностями по отношению к обычному квантованию в Декартовых координатах.

Преобразование Ганкеля было очень полезно в этой секции. Соответствующие математические подробности представлены в конце.

В заключении излагаются основные результаты, полученные в диссертационной работе и выносимые на защиту.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. V. V. Mkhitaryan, R. P. Poghossian, T. A. Sedrakyan, "Perturbation theory in radial quantization approach and the expectation values of exponential fields in the Sine-Gordon model", J. Phys. A **33** (2000) 3335
2. J. Ambjorn, D. Arnaudon, A. Sedrakyan, T. Sedrakyan, P. Sorba, "Integrable ladder t - J model with staggered shift of the spectral parameter", J. Phys. A **34** (2001) 5887-5900
3. T. Sedrakyan, "Staggered anisotropy parameter modification of the anisotropic t - J model", Nucl. Phys. B **608** (2001) 557-576
4. T. Sedrakyan, "Staggered anisotropy parameter modification of the Perk-Schultz model", Proceedings of the INTAS 99-01 459 workshop Annecy-le-Vieux, May 21-25, Eds. A. G. Bytsko, M. Karowski
5. D. Arnaudon, A. Sedrakyan, T. Sedrakyan, P. Sorba, "Symmetries in staggered models", Proceedings of the INTAS 99-01 459 workshop Annecy-le-Vieux, May 21-25, Eds. A. G. Bytsko, M. Karowski

6. Arnaudon, A. Sedrakyan, T. Sedrakyan, P. Sorba, "Generalization of the $U_q(gl(N))$ algebra and staggered models", Lett. Math. Phys. 58 (2001) 209-222

Ամփոփում

Ատենախոսությունը նվիրված է քվանտային դաշտի տեսության, ստատիստիկական ֆիզիկայի ճշգրիտ լուծվող նոր աստիճանածև մոդելներին:

Ատենախոսության մեջ գտնված է Յանգ-Քակստեր հավասարումների ընդհանրացումը այնպիսի մոդելների համար, որոնք ունեն R -մատրիցաների տատանվող դասավորվածություն միաժամանակ ժամանակային և միաչափ տարածական ուղղություններում: Այդ հավասարումների նպատակն է տարբեր սպեկտրալ պարամետրերով անցումային մատրիցաների կոմմուտատիվության ապահովումը:

Դիտարկվել է ճշգրիտ լուծվող $t \sim J$ մոդելը և նրա հիմքի վրա կառուցվել է ինտեգրվող մոդել շղթայի երկայնքով սպեկտրալ պարամետրի տատանվող տեղաշաժով: Մոդելի Համիլտոնյանը հաշվված է ֆերմիոնային ձևակերպման շրջանակներում: Այն պարունակում է երեք հարևան ֆերմիոնների փոխազդեցություն և հետևաբար ներկայացվում է զիզագա աստիճանային (*ladder*) մոդելի տեսքով:

Հանրահաշվական Բետե Անգացի տեխնիկայի օգնությամբ գտնված են տվյալ մոդելի անցումային մատրիցայի սեփական վիճակները և նրանց համապատասխանող սեփական արժեքները: Նշված է, որ քերտոդինամիկ սահմանում մոդելը գտնվում է միհիմալ էներգետիկ վիճակում ֆերմիոնների քարորդ-լցվածության դեպքում, հակառակ սովորական դեպքի կես-լցվածությանը:

Ընդհանրացված, Z_2 աստիճանավորված Յանգ-Քակստեր հավասարումները լուծված են նաև անիզոտրոպիկ $t \sim J$ մոդելի համար: Կառուցված է մոդել, որի անիզոտրոպիայի պարամետրը շղթայի երկայնքով տեղադրված է տատանվող ձևով: Հաշվված է համապատասխան Համիլտոնյանը, և քանի որ այն պարունակում է հարևանին հաջորդող էլեմենտների միջև փոխազդեցություն, կարող է ներկայացվել զիզագա ձևով: Կիրառված է Հանրահաշվական Բետե Անգացի տեխնիկական, և անցման մատրիցայի սեփական վիճակները համապատասխան սեփական արժեքների հետ մեկտեղ հաշվված են:

Ատենախոսությունում կառուցված է նաև Հաբբարդի տիպի ճշգրիտ լուծվող մոդել, որի Լակս օպերատորները շղթայի երկայնքով դասավորված են Z_2 աստիճանավոր ձևով:

Տատանվող Յանգ-Քակստեր հավասարումները լուծված են և գտնված են տվյալ մոդելի Լակս օպերատորները ֆերմիոնային դաշտերով արտահայտված:

Ատենախոսությունում սահմանված և գտնված են տատանվող Յանգ-Քակստեր հավասարումների լուծումը ընդհանուր $gl(N)$ դեպքի համար: Մանրամասն դիտարկված է $N=2$ դեպքը և գտնված է համապատասխան քվանտային խումբը, որը հանդիսանում է համաչափության խումբ այդ լուծման համար: Դա կարելի է ներկայացնել որպես $U_{qB}(gl(2))$ քվանտային խումբ qB - դեֆորմացիայի պարամետրով, որտեղ $(qB)^2 = q^2$: Նշված մոդելների ետևում կանգնած սիմետրիան նաև կարելի է ներկայացնել որպես $U_{q,i}(gl(N))$ խումբի ուղիղ արտադրյալ:

Ատենախոսության վերջին գլուխը նվիրված է մասսիվ Տիրրինգի մոդելի ռադիալ քվանտացման հիման վրա զարգացված խոտորումների տեսությանը: Կարևոր է նշել, որ մասսիվ տեսությունների ռադիալ քվանտացման շրջանակներում առաջացող հիմնական դժվարությունը, որն է Համիլտոնյանի ժամանակից բացահայտ կախվածությունը, հաջորդաբար հաղթահարված է: Այս ձևակերպման մեջ մասսիվ Տիրրինգի մոդելի փոխազդեցության հաստատունի առաջին աստիճանում

գտնված է վակուում-վակուում ամպլիտուդան՝ Ֆերմի դաշտերի կամայականորեն շեղված սահմանային պայմաններում:

Sine-Gordon տեսության տերմիններում այս ամպլիտուդան դա էքսպոնենցիալ դաշտի վակուումային միջինն է. $\langle \exp i\alpha\phi(0) \rangle$: Ստացված արդյունքը հաստատում է Ջամուլուդիլովի և Լուկյանովի կողմից առաջարկված հիպոթեզը էքսպոնենցիալ դաշտի վակուումային միջինի արտահայտության վերաբերյալ:

